概统专整 up↑

Do Small,

Make Wonder.

目录#.

1. (2~4) 离散,连续分布的重要分布内容与数字特征.

2. (2~4) 一维·概率描述体系

描述体系包括:

· 分布函数 < 密度函数. / 分布律(列)

边缘分布

条件分布.

· 随机变量的函数的分布函数

· 随机变量之间关系的定义(独立、不相关)

3. (2~4) 多维·概率描述体系

4. (6~8) 考前·常用统计量及其分布.

#1 离散/连续重要分布的内容与数字特征.

离散类

→ 拓展: 当 $n\to\infty$ 时, 超几何分布近似为二项分布.

· (0,1) 分布 (略)　· 超几何分布 (略) $X\sim H(N,M,n)$, $E(X)=\frac{nM}{N}$, $D(X)=\frac{nM(N-n)}{N^2(N-1)}(N-M)$

· 二项分布 $X\sim B(n,p)$

分布特征 → 设在n重伯努利试验中事件A发生次数为X.

则 $P\{X=k\}=C_n^k p^k (q)^{n-k}$, $q=1-p$, $k=0,1,2,\dots n$

数字特征 → $E(X)=np$, $D(X)=np(1-p)$

重要性质.定理 → 记 $b(k,n,p)=C_n^k p^k q^{(n-k)}$, $q=1-p$, $X\sim b(n,p)$

① $b(k,n,p)=b(n-k,n,1-p)$

理解: 在n次伯实中, A发生k次概率 = $\bar{A}$ 发生n-k次概率

② 当 $k<(n+1)p$, b单调减, 当 $k>(n+1)p$, b单调增

原因: $\frac{b(k,n,p)}{b(k-1,n,p)}=\left(\frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}\right)+1$

估概

③ 当 $n\to\infty$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} b(k,n,p)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda=np$.

使用条件: 实际计算中, $n\geq100$, $np\leq10$ 近似效果很好 (n很大p很小)

④ 当 $n\to\infty$ 时但p并不小时, $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)$

使用条件: 实际计算中, $n\geq50$, p不是很小.

泊松分布系数与单调性关系 「$\lambda\leq1$ $P(k)$ 随k增加而非增; $\lambda>1$, $P(k)$ 随k↑而先增后减」

对比

描述一段时间内事件发生多少次的概率分布

· 泊松分布: $X\sim\pi(\lambda)$ 或 $P(\lambda)$

分布特征 → 随机变量X的分布律 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda>0$.

数字特征 → $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda(e^{-\lambda})\cdot(e^{\lambda})=\lambda$

$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\lambda^2=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!}-\lambda^2$

$=e^{-\lambda}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\lambda^2\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right]-\lambda^2=(\lambda^2+\lambda)-\lambda^2=\lambda$

· 几何分布: $X\sim G(p)$. 「等比分布」

分布特征 → 随机变量X的分布列: $P\{X=i\}=(1-p)^{i-1}p$

e.g. 在独立重复实验中, 试验次数预先不能确定, 将实验进行到成功一次为止.

数字特征 → $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot(1-p)^{i-1}p$ $\underline{\underline{\text{数列求和, 构造}(1-p)E(X),\text{错位相减}}}$ $\frac{1}{p}$

$D(X)=\sum_{i=1}^{\infty} i^2(1-p)^{i-1}p-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{1-p}{p^2}$

重要性质、定理 → 无记忆性: $X\sim G(p)$, $\forall n\in N, k\in N$ 有 $P\{X=n+k\mid X>n\}=P\{X=k\}$

└ 证明: $P\{X>n\}=\sum_{k=n+1}^{\infty}P\{X>n\}=\sum_{k=n+1}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=n+1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p=(1-p)^n$

而 $P\{X=n+k\mid X>n\}=\frac{P\{X=n+k,X>n\}}{P\{X>n\}}=(1-p)^{k-1}p=P\{X=k\}$

收集类问题: 集齐M种/个物品平均需要 $M\sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k}=MH_M$ 次尝试

e.g. 记X为集齐108款卡片需要打开的干脆面袋数 ⇒ $E(X)$

记 X_N 为已经收集了N款卡片, 为了获得第N+1款还需打开的干脆面袋数.

⇒ $p_N=\frac{108-N}{108}$, $X_N\sim Ge(p_N)$ $E(X_N)=\frac{1}{p_N}=\frac{108}{108-N}$.

⇒ $E(X)=E\left(\sum_{N=0}^{107}X_N\right)=\sum_{N=0}^{107}E(X_N)=108\left(\frac{1}{108}+\frac{1}{107}+\dots+\frac{1}{2}+1\right)=569$.

连续类.

· 均匀分布: X等可能落在U内, 与所处位置无关

○一维: $X\sim U[a,b]$.

分布特征 → X的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b.\\ 0, & else.\end{cases}$

数字特征 → $E(X)=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$ $D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$

○二维: $(X,Y)\sim U\cdot G$

分布特征 → 二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & else\end{cases}$

(A为G域面积)

对比

描述事件与事件之间, 间隔时间的概率分布

· 指数分布: $X\sim E(\lambda)$

分布特征 → X的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & else\end{cases}$

数字特征 → $E(X)=\int_0^{+\infty}\lambda x e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}$

$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\int_0^{+\infty}\lambda x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$

重要性质 → 无记忆性: $P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$.

理解: $P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>0+t\mid X>0\}=P\{X>t\}$

· 正态分布：

① 一维：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

分布特征 → X的概率密度函数：$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$

数字特征 → $E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2$.

重要性质 → 再生性 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

② 二维：$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ "$\rho = \rho_{XY}$"

分布特征 → X的概率密度函数 $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}}$

重要性质 → ① 二维正态分布的边缘分布为一维正态分布.

② (推广到n维)

n 维正态随机变量具有以下四条重要性质(证略)： 比较重要，考研需要

1° n 维正态随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的每一个分量 $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 都是正态随机变量；反之，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态随机变量，且相互独立，则$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是 n 维正态随机变量. 1 整体与局部关系

2° n 维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的任意的线性组合 2 整体与局部的关系2， 这个可以推导1，只要令l1–ln–1为0

$$l_1X_1 + l_2X_2 + \cdots + l_nX_n$$

服从一维正态分布(其中 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 不全为零).

3° 若$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$服从 n 维正态分布，设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ 是 X_j $(j=1, 2, \cdots, n)$的线性函数，则$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$也服从多维正态分布. 3 n维随机变量之间关系

这一性质称为正态变量的线性变换不变性.

4° 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$服从 n 维正态分布，则"$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立"与"$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 两两不相关"是等价的. 4 可以由二维推广得到

n 维正态分布在随机过程和数理统计中常会遇到.

· 标准正态分布：$X \sim N(0, 1)$

分布特征 $\begin{cases} \text{概率密度函数记为 } \varphi(x) \\ \text{分布函数 记为 } \Phi(x). \end{cases}$

重要性质 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

其它参考： 🔗柏松分布vs_指数分布

#2 一维·概率描述体系

分布函数

核心：$F(X) = P\{X \le x\}$

$P\{a < X \le b\} = F(b) - F(a)$，$a, b \in R$.

抽象函数内在特性："单调有界右连续"

1) 单调不减：$x_1 < x_2$，$F(x_1) \le F(x_2)$

2) 有界：$0 \le F(X) \le 1$，$F(-\infty) = 0$，$F(+\infty) = 0$

3) 右连续：$F(X) = F(X+0) = \lim\limits_{y \to x+0} F(y)$

连续函数

核心：$f(x)$：$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$

性质：1) $f(x) \ge 0$　2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$　"非负和一"

$P(X \le x)$ 或 $1 - P\{X > x\}$

$\Downarrow$

$F(X)$

（一般是分段函数）

$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$　　$\sum\limits_{i \le k} p(x_i)$，$x_k \le x < x_{k+1}$

$F'(x) = f(x)$

$\Downarrow$ $f(x)$在x处连续

$f(x)$

$P\{a < X \le b\} = \int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow P(X = a) = 0.$

随机变量函数的分布

· 离散型：

X：$P\{X = x_k\} = p_k$，$k = 1, 2, 3 \ldots$　而 $Y = g(X)$.

$\Rightarrow P\{Y = y_j\} = \sum\limits_{g(x_k) = y_j} P\{X = x_k\}$

· 连续型：

① 分布函数法（通法）

设随机变量X的概率密度函数$f_X(x)$，且$Y = g(X)$.

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = \int_{g(X) \le y} f_X(x)\,dx \Rightarrow f(y) = F_Y'(y).$$

② 公式法（需$g(x)$严格单调、可导）.

设随机变量X的概率密度函数$f_X(x)$，且$Y = g(X)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & else \end{cases}$$

注：$h(y)$是$g(x)$的反函数，$a = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$　$b = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$

推导思考（从通法出发，认为y，x'为已知常数）

$y = g(x')$　　$x' = h(y)$

$f_X(x') \longrightarrow f_X(h(y))$

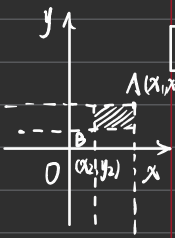
$F_Y(y) = F_X(x') = \int_{-\infty}^{x'} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x'} f_X(h(y))\,d\,h(y)$

#3 二维·概率描述体系「重难」

前言：这一部分我们将着重研究于X，Y之间的关系，你会发现，边缘分布、条件分布、联合分布无一不是在研究X，Y之间的关系

我们将分为三个部分：二维随机变量的分布、函数的分布，随机变量关系具化

P1



·二维：联合分布函数

核心：$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

$P\{\text{▨}\}=P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}$

$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$

抽象函数外在性质：

1) 对x或y单调不减

2) $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$

3) $F(x,y)=F(x+0,y)$；$F(x,y)=F(x,y+0)$

·二维：概率密度函数

核心：$f(x,y)$：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv$.

性质：$f(x,y)\ge 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=1$ 非负和一

·二维：边缘分布

核心：$F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy\right]dx$

$P_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{\infty}P_{ij}=P\{X=x_i\}$　　$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$

同理 $F_Y(y)$，$P_{\cdot j}$，$f_Y(y)$.

·二维条件分布

核心：① $P_{X|Y}(i|j)=P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\dfrac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$

② $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

$P\{X\le x, Y\le y\}$

$\Downarrow$

$F(x,y)$ ~~(细节：累次积分)~~

$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\,du\,dv$

$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

② X，Y相互独立　$f(x,y)$　① $f(x,y)$在(x,y)处连续

$\Downarrow$

$P\{(x,y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$

P_2

二维随机变量函数的分布

I. $Z=g(X)$型

一般性理论：已知 $Z=g(X,Y)$, $z=g(x,y)$，有解 $y=h(x,z)$

那么 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,h(x,z))\left|\frac{\partial h}{\partial z}\right| dx$.

特别，① $Z=aX+bY$, $y=\frac{1}{b}(-ax+z)$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\frac{1}{b}(-ax+z))\left|\frac{1}{b}\right| dx$

若X,Y相互独立时

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(\frac{1}{b}(-ax+z))\left|\frac{1}{b}\right| dx$

② $Z=X+Y$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$

若X,Y相互独立时，有卷积公式：

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy$

①②应用于常见分布的"可加"中：

B (1) $X\sim B(m,p)$, $Y\sim B(n,p)$

$X+Y\sim B(m+n,p)$

π (2) $X\sim \pi(\lambda_1)$ $Y\sim \pi(\lambda_2)$

$X+Y\sim \pi(\lambda_1+\lambda_2)$

注：$X-Y$不服从泊松分布.

N (3) $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$

③ $Z=XY$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\frac{z}{x})\left|\frac{1}{x}\right| dx$

若X,Y相互独立时，有 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x})\,dx$

同理 $Z=\frac{X}{Y}$, $Z=\frac{Y}{X}$，不赘述.

II Max, Min型

· $Z=\max(X_1,X_2,\dots X_n)$

$F_Z(z)=P\{\max(X_1,X_2,\dots X_n)\le z\}$

$=P\{X_1\le z, X_2\le z,\dots X_n\le z\}=F(z,z,\dots z)$

① $X_1,X_2\dots X_n$独立 $F_Z(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\dots F_{X_n}(z)$.

② $X_1,X_2\dots X_n$独立同分布 $F_Z(z)=(F_{X_i}(z))^n$.

很容易推出 $Z=\min(X_1,X_2,\dots X_n)$，不赘述

拓展

变量换元法

设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为$f(x,y)$，如果函数

$$u=g_1(x,y), v=g_2(x,y)$$

有连续偏导数，且存在唯一的反函数 $x=h_1(u,v), y=h_2(u,v$

其变换的雅各比行列式不为0，即

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\ne 0$$

则$U=g_1(X,Y), V=g_2(U,V)$的联合密度函数为

$$f_{UV}(u,v)=f\big(h_1(u,v),h_2(u,v)\big)|J|$$

P_3 本部分讨论：相关系数，独立

· 相关系数：X与Y的线性关系

$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = Cov(X^*, Y^*)$

性质 (1) $|\rho_{XY}| \le 1$

(2) $P\{Y = aX+b\} = 1 \Leftrightarrow |\rho_{XY}| = 1$

· 独立等价几大命题（充要）

(1) X, Y相互独立

(2) $P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\} P\{Y \le y\}$

$F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$

(3) 离散型：$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}$

连续型：$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

亦可理解为①由定义而来

亦可理解为②边缘分布的性质

(4) $Cov(X,Y) = 0$ / $\rho_{XY} = 0$

(5) $E(XY) = E(X)E(Y)$

(6) $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

［相关定理］：设 $X_1、X_2 \dots X_m$ 与 $Y_1、Y_2 \dots Y_n$ 相互独立

(1) X_i $(i=1,2,\dots,m)$ 与 Y_j $(j=1,2,\dots,n)$ 相互独立

(2) 若h, g连续，则 $H = h(X_1, X_2, \dots X_m)$ 与 $G = g(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ 独立

「补充定理」