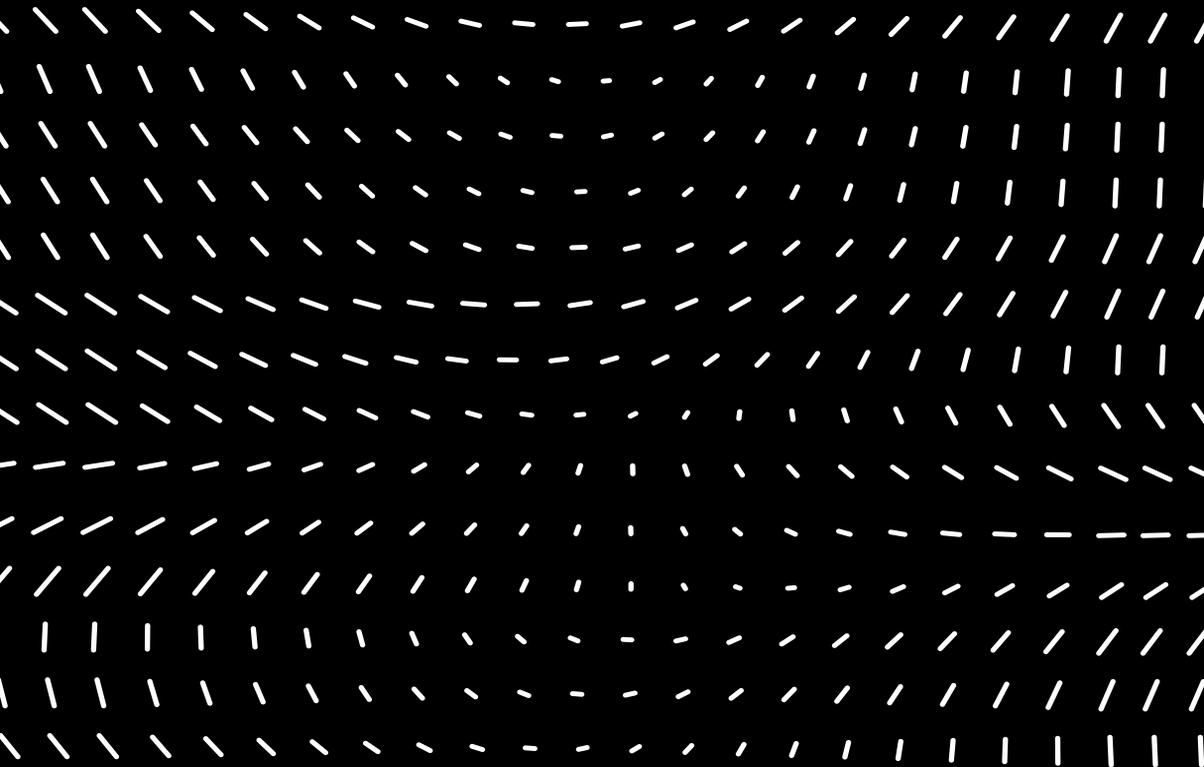


# Core of U-Physics

The Language of Maths and our imaginary constructs Physics.



# 考前必看清单

## 1. 常见物体的转动惯量



$$J_z = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{1}{3} ML^2$$



圆环

$$J_z = \int_0^L R^2 \frac{M}{2\pi R} dl = MR^2$$



圆盘

$$J_z = \int_0^R r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{1}{2} MR^2$$



圆柱

$$J_z \stackrel{\text{网上}}{=} \frac{1}{2} MR^2$$



圆柱壳

$$J_z = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{2} MW^2$$



球

$$J_z = \frac{2}{5} MR^2$$

## 2. 电磁学常见常量

$\epsilon_0$  真空介电常数 (真空电容率)

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$\mu_0$  真空磁导率

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$\epsilon_r$  相对介电常数

$$\epsilon_r = C_x / C_0$$

$\mu_r$  相对磁导率

$$\mu_r = B / B_0$$

## 3. 机械振动的常见结论

# 4 傅科摆与正确引入非惯性力

$\vec{F} = m\vec{a}_c = m\vec{a}$

## 傅科摆

第三步：旋转系中某一方向的虚拟力： $f' = m(a_{\text{物}} - a_{\text{固}})$

科里奥利力： $f_c = f' - f_{\text{惯性离心力}}$   
 $f_{\text{惯性离心力}} = -m\omega^2 r$

只有  $v_r$  分量：  
 $f_{c \text{ 径向}} = f' - f_{\text{惯性离心力}} = -m\omega^2 r + m\omega^2 r = 0$

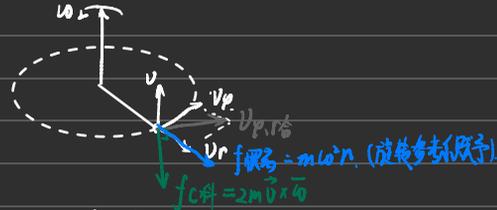
$f_{c \text{ 切向}} = f' - f_{\text{惯性离心力}} = -2m\dot{v}_\phi \omega - 0 = -2m\dot{v}_\phi \omega$

只有  $v_\phi$  分量：  
 $f_{c \text{ 径向}} = f' - f_{\text{惯性离心力}} = -m\omega^2 r - 2m\omega v_\phi - (-m\omega^2 r) = -2m\omega v_\phi$   
 $f_{c \text{ 切向}} = 0$

只有  $v$  分量：  
 $\vec{f}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$   
 $f_c = 0$

我们就对原因引入非惯性力：

- ① 惯性离心力
- ② 科里奥利力



应用例题：第二章 P58 (14)

# 5. (冷) 位移电流 vs 传导电流

同：产生磁场的规律相同。

异：1. 位移电流的实质是变化的电场，它不是电荷的定向移动。

2. 位移电流不仅在导体中，而且在介质和真空中存在。 3.

位移电流不产生焦耳热。

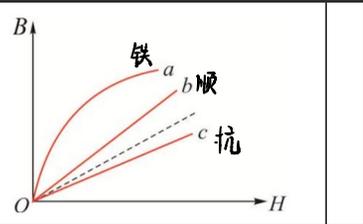
特别：在介质中主要是位移电流，在导体中主要是传导电流，在高频电流流过的情况下，二者均起作用。

# 6 霍尔电压主要应用 ① 测量磁场、② 测量载流子浓度

温差电主要运用 ① 测量温度 ② 电子制冷/热

# 7 (冷)

弱磁质 $\mu_r \approx 1$	顺磁质：介质内， $\vec{B}$ 与 $\vec{B}_0$ 同向， $B \ll B_0$ (绝大多数物质) $\mu_r > 1$
	抗磁质：介质内， $\vec{B}$ 与 $\vec{B}_0$ 反向， $B \ll B_0$ (如Cu、Ag、Ar等) $\mu_r < 1$
强磁质—铁磁质： $\mu_r \gg 1$	介质内， $\vec{B}$ 与 $\vec{B}_0$ 同向， $B \gg B_0$ (如Fe、Co、Ni等)



# 8 (冷)

- 3. 阻尼振动和受迫振动的概念
- 阻尼振动：振幅（或机械能）随时间而减小的振动
- 受迫振动：振动系统在外界驱动力作用下的振动

## 九、波

- 1. 机械波产生条件：振源+弹性介质
- 2. 分类：横波+纵波
- 3. 平面简谐波：空间周期性+时间周期性

## 9. 一般碰撞结论



$$\begin{cases} v_1 = \frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{(1+e)m_2}{m_1 + m_2} u_2 \\ v_2 = \frac{(1+e)m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - e m_1}{m_1 + m_2} u_2 \end{cases}$$

$$e = \frac{J}{I} = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$$

Wallis公式(点火公式):

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x) dx$$

$$= \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \times \frac{\pi}{2}, n \text{ 为正偶数} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \times 1, n \text{ 为大于1的奇数} \end{cases}$$

特别地:  $n = 1$  时  $\rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x) dx = 1$

推广:

$$\int_0^{\pi} (\sin^n x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n x) dx$$

$$\int_0^{\pi} (\cos^n x) dx = \begin{cases} 0, n \text{ 为正奇数} \\ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x) dx, n \text{ 为正偶数} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin^n x) dx = \int_0^{2\pi} (\cos^n x) dx$$

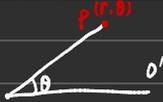
$$= \begin{cases} 0, n \text{ 为正奇数} \\ 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^n x) dx, n \text{ 为正偶数} \end{cases}$$

# Pattern 1 刚体动力学

参考章节数: 1, 5, 6

#1 运动学研究转动问题.

· 平面极坐标系



$$\text{运动方程} \begin{cases} \theta = \theta(t) \\ r = r(t) \end{cases}$$

重要参量:  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$ ,  $v = r\omega$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

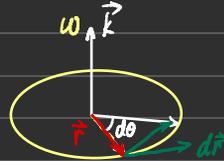
$$\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = \beta r \\ a_n = v^2 = \omega v = r\omega^2 \end{cases}$$

特别地: 对于匀变速直线运动:

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \beta t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

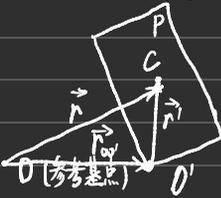
矢量形式  $\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k}$ ,  $\vec{\beta} = \frac{d\omega}{dt} \vec{k}$

角量和线量关系:  $d\vec{r} = (\vec{k} \times \vec{r}) d\theta$



#2 刚体动力学: 我们的目的是为了明晰刚体的平面平行运动.

我们将刚体的平面平行运动分解为平动和绕质心的转动.



对于P的瞬时位移

$$\vec{r} = \vec{r}_{\omega} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\omega} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt}$$

$$= \vec{a}_{\omega} + \frac{d\omega}{dt} \times \vec{r}' - \omega \vec{r}'$$

从动力学角度: 我们选了质心系的方法:

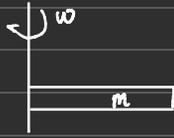
对质心:  $\sum F_x = ma_{cx}$   $\sum F_y = ma_{cy}$

相对质心的转动:  $M_C = \frac{dL_C}{dt} = \int_C \beta = \frac{d(L_C)}{dt}$

从能量角度: (柯尼希定理)  $E_k = \frac{1}{2} mV_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$

# 井 刚体动力学基础模型。—— 绕定轴转动的刚体

单质点



动力学方程:  $\Delta M \frac{dV_z}{dt} = F_k + f_k$

$\Rightarrow Mz = Jz \frac{d\omega}{dt} \quad \leftarrow \quad M = \frac{dL_z}{dt}$

动量矩  $\Rightarrow L = \vec{r} \times m\vec{v} = J\omega$

动能  $\Rightarrow E_k = \sum E_{ki} = \frac{1}{2} Jz \omega^2$

质心系:



动量矩  $\Rightarrow \vec{L}_O = \sum_i \vec{L}_{Oi} = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_C \times M \vec{v}_C + \vec{L}_C$   
 质心的动量矩      相对质心的动量矩

$\vec{M}_{O/C} = \frac{d\vec{L}_C}{dt}$  (质心系动量矩方程)

综上, 刚体动力学两大模型: 刚体平面平行运动、刚体绕定轴转动

# Partern 2 质点系与质心系方法.

质心系定义      质心系特性:      应用-碰撞, 刚体  
 外力集中于质心;  
 零动量系;  
 柯尼希定理;

质心系的定义, 顾名思义: 确定质心的位置.

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad \text{①}$$

基于①式有一阶子:  $\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$       二阶子:  $\vec{a}_c = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M} \Rightarrow M \vec{a}_c = \sum \vec{F}_{i, \text{外}}$

质心性的特性:

•  $M \vec{a}_c = \sum \vec{F}_{i, \text{外}}$       外力作用集中于质心 C

• 设质点 i 相对于质心 C:  $\vec{v}_i, \vec{r}_i$ , 基于定义:  $E_k = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i)^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i + \vec{v}_c)^2$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \vec{v}_c \sum m_i \vec{v}_i + \frac{1}{2} \sum m_i v_c^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_c^2 + 0 + \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

质心动能      相对于质心动能

柯尼希定理.

质心系的运用, 应用:

• 应用于 1: 解决简单碰撞问题

$$\frac{u_1}{m_1} \quad \frac{u_2}{m_2} \Rightarrow \frac{v_1}{m_1} \quad \frac{v_2}{m_2}$$

考虑两质点构成的质心系:

•  $v_c = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \quad \underline{a_c = 0} \quad \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

$\begin{cases} \vec{u}_{1c} = \vec{u}_1 - \vec{v}_c, & \vec{v}_{1c} = \vec{v}_1 - \vec{v}_c \\ \vec{u}_{2c} = \vec{u}_2 - \vec{v}_c, & \vec{v}_{2c} = \vec{v}_2 - \vec{v}_c \end{cases}$

而守恒条件是  $\begin{cases} m_1 \vec{u}_{1c} + m_2 \vec{u}_{2c} = m_1 \vec{v}_{1c} + m_2 \vec{v}_{2c} = 0 \\ e (\vec{u}_{1c} - \vec{u}_{2c}) = (\vec{v}_{1c} - \vec{v}_{2c}) \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} -e \vec{u}_{1c} = \vec{v}_{1c} \\ -e \vec{u}_{2c} = \vec{v}_{2c} \end{cases} \text{ 成比例} \Rightarrow \Delta E_k = \frac{1}{2} e^2 (m_1 u_{1c}^2 + m_2 u_{2c}^2)$

• 应用于 2: 刚体动力学中的平面平行运动能量分析

## Pattern 3 牛顿经典力学.

这一章节主要聚焦于题型:

变质量问题(时刻分析法)、求运动轨迹、非惯性系问题(补充傅氏力见考前清单)

# Pattern 电磁学

子部分：静电场，恒定磁场，变化电场和变化磁场。

参考章节：8, 9, 10 目标：整理好核心知识原理同时整理好题型。

## 静电场 # HASHTAG

我们这部分通过四个模型引入静电场。

一般静电场、电容器的静电场、电偶极子、电介质/导体。

### § 一般静电场：

我们从定性的角度出发，构建理论模型。

我们知道，据法拉第的思想，**电场线**是描述电场性质的核心，**电荷**是静电场的来源。



为了定量的描述好电场，我们从电场线，与电荷入手：

· (电场强度)  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$  电场线  $\frac{1}{r^2}$  是  $\vec{r}$ 。

· (电场线数量 — 电通量)  $d\phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

与电荷的关系(有电荷的模型下描述)： $\phi_E \propto q \dots \phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$



为了再描述好电场的能量，我们引入

· (电势差)  $u_{12} = \frac{A_{12}}{q_0} = \int_{\omega} \vec{E} \cdot d\vec{l}$

在有电荷模型下描述： $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

可以发现，定义的物理量须摆脱 q 成为一般描述

电场的性质离不开电场线的性质：

· 有源性描述  $\phi_0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$



· 不相交、不闭合描述：在静电场中沿闭合曲线一周做功为 0， $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

### 具体的常见静电场模型：

球对称分布电场



轴对称分布电场



$\rho$ ：电荷线密度

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0 r}$$

面对称分布



$\rho$ ：电荷面密度

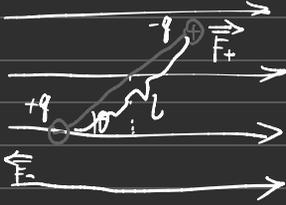
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} + \oint_{S_2} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

## § 电容器中的静电场 ( $C \rightarrow Q \rightarrow \vec{E}$ ).

电容是指容纳电荷的能力。任何静电场都是由许多个电容组成，有静电场就有电容，电容是用静电场描述的。一般认为：孤立导体与无穷远处构成电容，导体接地等效于接到无穷远处，并与大地连接成整体。

我们本章只讨论孤立导体电容器： $C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_{100} + U_0}$

## § 电偶极子 (基本模型)：是对论电极化、电介质的基础。



$|\vec{p}| = ql$ , 方向由负电荷指向正电荷  
而使电偶极子转动的力矩 (均匀静电场).

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} = qlE \sin\theta$$

其中电势能： $W = W_+ + W_- = q \int_+^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} + q \int_-^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$   
 $= q \int_+^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = qEL \cos\theta = pL \cos\theta = \vec{p} \cdot \vec{E}$

## § 电介质/导体

两者很类似，但是由于导电率分成两类。

· 电介质不是自由电荷，里面的是电偶极子。

· 导体内是自由电荷，所以静电场中导体内部前后均场为0。

### 电介质极化的本质

由于电介质的极化电荷是电介质的结果，所以极化电荷与极化强度之间存在某种定量关系。我们可以利用一个特殊关系推导出这个关系。如模型图所示，在一介质层为d，横面积为S的均匀电介质两面平行的自由电荷面密度分别为 $\sigma'$ 和 $-\sigma'$ 的绝缘板之间加入各向同性的均匀电介质。由于极化电荷的作用，在靠近带电平面的介质表面上会出现与自由电荷同号的均匀分布的极化电荷，其面密度是 $-\sigma'$ 和 $\sigma'$ ，而在介质内部没有剩余的极化电荷，所以整个介质的极化电荷矢量和是 $\sigma'Sd$ ，而电介质强度是

$$P = \frac{\sum p_{induced}}{\Delta V} = \frac{\sigma'Sd}{Sd} = \sigma' \quad (1)$$

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$\sigma'$ 方向向下。若电介质表面的极化电荷面密度是，则极化电荷所激发电场的电场强度的大小是

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

方向向上。所以介质中的电场强度是  $E = E_0 - E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$

利用式  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$ ，代入上式有

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

于是得到自由电荷密度与极化电荷密度的关系是

$$\sigma' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \sigma$$

利用关系式  $q = \sigma S, q' = \sigma' S$ ，得到自由电荷与极化电荷的关系是

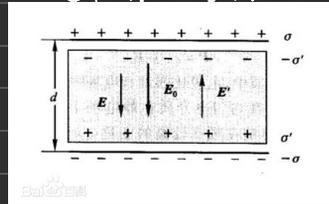
$$q' = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q$$

可得出电介质中电介质强度与电场强度的数值关系

$$P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E$$

定义  $\chi_e = \epsilon_r - 1$ ，称为电介质的电极化率 (electric susceptibility)，相应的矢量关系是

$$P = \epsilon_0 \chi_e E$$



查“ $\epsilon_r$ ”百科  
就是这么定义的

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$$

$\downarrow$  A不变

$$E = \frac{U}{\epsilon_r d}$$

$$U = \frac{U_0}{\epsilon_r}$$

描述清楚极化物理量的关系

$$\vec{P}, \vec{\alpha}(\sigma)$$

极化电荷 极化电

极化电荷 极化电

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$$\vec{E}_0 = \vec{E} - \vec{E}'$$

最终我们有电介质下的两个定理

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sum q_i$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}, E = \frac{U}{\epsilon_r d}, \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$$P = \epsilon_0 E'$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

电位移

# 恒定磁场 # HASHTAG

研究的步骤类似于研究静电场:

我们将引入三个模型阐述恒定磁场:

**恒定磁场 (依据稳恒电流元)、磁偶极子、磁介质及磁介质影响下的恒定磁场**

此外我们不会涉及到:

带电粒子在磁场中的运动及应用。

## 恒定磁场

我们从定性的角度出发, 构建理论模型。

我们知道, 据法拉第的思想, **磁感线**是描述磁场性质的核心, 而恒定磁场的研究依据**电流元**。

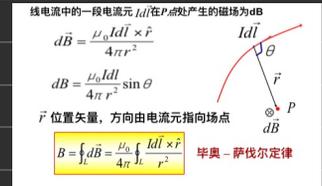


我们借助**电流元**来定量描述恒定磁场:

· (磁感应强度  $B$ ): 
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

· (磁感线数量  $\rightarrow$  磁通量): 
$$d\phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$
  

$$\phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



我们而已知的磁感线的性质定量描述恒定磁场的性质

· 磁感线的无源性:

$$\oint_D \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

安培环路定理的使用易出错

Q 为什么有限长直导线用安培环路定理容易出错?

· 磁感线的闭合性:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

也反映了**电流元与磁场的密切关系**

我们通过上述理论, 论证下面常见的恒定磁场模型

① 长直导线

② 圆环导线 (线圈)

③ 直螺线管

④ 微观电荷



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$B = \mu_0 I \frac{R^2}{2(R^2 + r^2)^{3/2}}$$

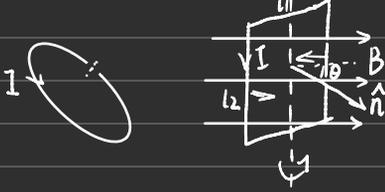
$$B = \frac{\mu_0 I}{2} n (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

$$B = \frac{dB}{dN} = \frac{\mu_0 q_0 v \sin\theta}{4\pi r^2}$$

n: 每单位长度 n 匝线圈

## 磁偶极子:

磁偶极子即小电流环, 一般作载流线圈



磁偶极子的磁矩:  $\vec{p}_m = I \cdot S \vec{n}$

磁偶极子在恒定磁场中所受磁力矩  $\vec{M} = L l_2 B \sin \theta = \vec{p}_m \times \vec{B}$

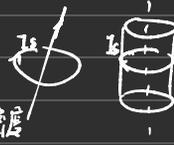
磁偶极子势能  $U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$

## 磁介质及磁介质影响下的恒定磁场.

我们直接类比电介质的思想, 对称地给出:

$$\vec{M} = \oint_{\text{沿}} \frac{\sum \vec{I}_s}{\Delta V} = \frac{\sum \vec{I}_s}{\Delta V} = j_s$$

$j_s$ : 沿磁介质轴线方向上单位长度的磁化电流密度



磁介质内部产生的磁场:  $\vec{B}'$  (附加磁场):  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$

怎么描述  $\vec{B}'$ :  $\vec{B}' = \frac{\mu_0 I_s}{2\pi R} = \mu_0 j_s = \mu_0 \vec{M}$ . 令  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ , 而又有  $\vec{B}/\mu_0 = \mu_r \vec{H}$

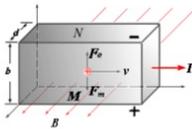
$$\Rightarrow \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_f \text{ (传导电流)} \quad \therefore \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

## 带电粒子在磁场中的运动. $\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$

### 霍尔效应

通有电流 I 的金属或半导体板置于磁感强度为 B 的均匀磁场中, 磁场的方向和电流方向垂直. 在金属板的两侧 M 和 N 之间就显示出微弱的横向电势差. 这种现象称为霍尔效应 (Hall effect). 电势差  $V_M - V_N$  就称为霍尔电压.



实验表明: 霍尔电势差的大小, 与电流 I 及磁感强度的大小 B 成正比, 而与板的厚度 d 成反比. 即:

$$V_M - V_N = R_H \frac{BI}{d}$$

$R_H$  称为霍尔系数

用磁场中的载流子受到的洛伦兹力来解释:

设载流子带电量为 q, 载流子的数密度为 n, 载流子的平均漂移速度为 v, 它们在洛伦兹力 qvB 作用下向板的一侧聚集, 使得在 M、N 两侧出现等量异号电荷, 在板内建立起不断增加的横向电场.

当载流子受到的洛伦兹力和横向电场力相等时, 载流子不再做侧向运动, 在平衡时有:

$$qvB = qE$$

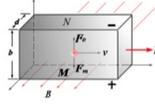
设板的侧向宽度为 b, 则:

$$V_M - V_N = Eb = Bvb$$

由电流强度 I 的定义,

$$I = nqbv \text{ 或 } v = I/nqb$$

霍尔电势差:  $V_M - V_N = BI/nqd$



# 变化的磁场和变化的电场 # HASHTAG

本章聚焦于两个部分：感应电动势、麦克斯韦方程组。

## 感应电动势部分：

第十章

动生电动势 (重点)      感生电动势 (重点)

$\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$ ,  $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$        $\mathcal{E} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$   
 电流内：非静电电场      法拉第电磁感应定律

$\Rightarrow \mathcal{E}_i = -k \frac{d\phi}{dt} \perp$        $d\vec{l} \cdot \vec{E} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$   
 $k=1$        $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$   
 N匝线圈:  $\mathcal{E}_i = -\frac{d(N\phi)}{dt}$        $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

① 模型:

② 模型: 
 $\mathcal{E} = BLv \sin \alpha$   
 $a > b \text{ 方向}$

③ 模型: 
 $d\mathcal{E}_i = \omega L B \sin \alpha d(\sin \alpha)$   
 $\mathcal{E} = \frac{B \omega L^2}{2} \sin \alpha$ ,  $a > b$

④ 模型: 
 自感模型  $I, B, \phi, \mathcal{E}$        $\Rightarrow$  自感储能  $A' = \frac{1}{2} LI^2$   
 $L = \frac{\phi}{I}$       建立在磁通上的模型

⑤ 模型: 
 互感模型       $\Rightarrow$  互感储能  $W_M = M I_1 I_2$   
 $M = \frac{\phi_{21}}{I_1} = \frac{\phi_{12}}{I_2}$   
 当1,2紧密耦合时  $M = \sqrt{L_1 L_2}$

求解动生电动势:  
 $\mathcal{E}_i = -n \frac{d\phi}{dt}$   
 $\mathcal{E}_i = \int_{(a)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$       适用于切割磁感线的情形  
 $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$

## 麦克斯韦方程组：

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_{oi} \dots \dots \dots (1) \quad \vec{D} = \vec{D}_{(1)静} + \vec{D}_{(2)满}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \dots \dots (2) \quad \vec{E} = \vec{E}_{(1)静} + \vec{E}_{(2)满}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \dots \dots \dots (3) \quad \vec{B} = \vec{B}_{(1)传} + \vec{B}_{(2)位}$$

$$\star \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_o + \iint_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \dots \dots (4) \quad \vec{H} = \vec{H}_{(1)传} + \vec{H}_{(2)位}$$

记住麦克斯韦方程组的两大前提：

- ① 涡旋电场      ② 位移电流。

下面我们研究某一时刻下的变化的电场。

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{静}} + \vec{E}_{\text{涡}}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{S} + \oint \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{S}$$

↑ 0

$$= \epsilon_0 \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} + 0 = \sum q_f$$

$$\therefore \textcircled{1} \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_f$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{\text{静}} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_{\text{涡}} \cdot d\vec{l}$$

$$= 0 + \epsilon_0 \dot{\Phi} = -\oint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\therefore \textcircled{2} \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\oint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

下面我们研究某一时刻下的变化的磁场。

$$\vec{B} = \vec{B}_{\text{恒}} + \vec{B}_{\text{变}} \quad (\vec{I}_{\text{全}} = \vec{I}_{\text{传}} + \vec{I}_{\text{位}})$$



$$\therefore \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{dQ}{dt} \quad \text{而} \quad \oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = \oint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \oint_{(S)} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{电流又连续} \Rightarrow \iint_{S_1} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_2} (\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum I_0 + \iint_S \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (S: \text{以} L \text{为边界的曲面})$$

$$\textcircled{1} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

# 关于电场、磁场能量

## • 电场储能

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$W = \int_V dw = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dv = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dv, W = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

## 9. 电介质中的高斯定理和环路定理

电介质: 极化模型 电偶极矩  $\vec{p} = q\vec{l}$

电位移矢量  $\vec{D}: \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$

$$\iiint_V \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

有电介质时的电场能量:  $w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$

## 3. 储能: 电感储能, 磁场能量

• 电感储能:  $W_m = \frac{1}{2} LI^2$

• 磁场能量:  $w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$

# 关于表面极化电荷密度、表面电流密度

## 8.9 静电场中的电介质

### 极化电荷面密度

在均匀电介质中, 极化电荷只能出现在表面。

考虑下式:

$$-dq' = \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

如在电介质表面内紧靠电介质表面取一闭合曲面, 若该闭合曲面上以面元  $ds$  为底的斜柱面内的电荷为  $-dq'$ , 则面元  $ds$  外侧电介质极化表面上的电荷为

$$dq' \therefore ds \text{ 表面的极化电荷为: } dq' = \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

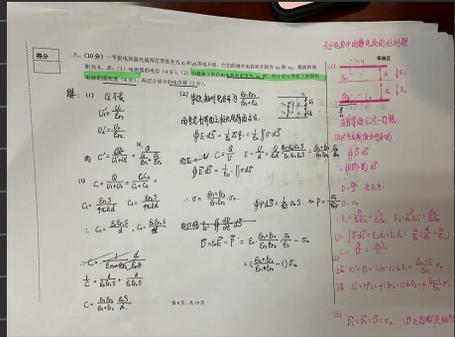
$$\Rightarrow dq' = ds \vec{P} \cdot \vec{n}, \therefore \sigma' = \frac{dq'}{ds} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}$  为电介质表面的极化电荷面密度。

$\sigma'$  可正可负。



详见电光17-18



## 9.7 物质的磁性

(2) 磁化强度与磁化电流  $I_s$  的关系

在外磁场作用下，介质中的分子电流可等效成介质表面的磁化电流  $I_s$ ，它产生附加磁场，但无热效应。

定义：沿磁介质轴线方向上单位长度的磁化电流称为磁化电流密度  $j_s$ 。

$$j_s = \frac{I_s}{L}$$

结论1：磁化强度的切向分量等于磁化电流密度。

$$M_t = j_s \quad \vec{j}_s = \vec{M} \times \hat{n} \quad (\text{磁介质表面外法向单位矢量})$$

切向指的是沿磁介质表面的切线方向

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$