高等数学下复习.

$+ \quad \times$

$- \quad \div$

Journey Toward.

Full Marks.

目录 Content

考试前必看清单.

(1) 隐函数求导法则 P88.

(2) 基于隐函数的空间曲线的切向量、法平面 (见笔记

(3) 方向导数的求法 (见笔记)

Q: 方向导数书上的求法有点困难 8-23

(4) 多元函数极值及求法

(5) 刘维尔公式, 二阶齐次/非齐次线性微分方程.

(6) 三重积分、二重积分

(7) 常见的泰勒级数.

(8) 函数项级数的一致收敛证明方法

考前易错提醒

* 按部就班，不要跳步，认真草稿.

* 积分的时候需仔细细心.不要在过程中漏些东西

* 注意常用泰勒级数的收敛域.

• Wallis 公式 (使用情况一般显然)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \ldots \times \frac{2}{3} \times \boxed{1} & (n\text{为奇且 } n \neq 1) \\ \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times \boxed{\frac{\pi}{2}} & (n\text{为偶}) \end{cases}$$

* 多元函数的一般极值条件.

重积分、曲线积分专题整理:

· 易漏易忘清单:

1 重积分下的广义坐标变换:

(二重:) $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$.

若满足 x,y 对于 u,v 的一阶偏导存在, $J(x,y)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$

有时候

从隐函数角度出发理解

$\begin{cases}u=h(x,y)\\ v=\varphi(x,y)\end{cases}$

$J(x,y)=\frac{1}{J(u,v)}$

则有换元公式 $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(x,y)|\,du\,dv$.

$$\boxed{\begin{cases}dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\\ dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\end{cases}\rightarrow dx\,dy=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}(du,dv)}$$

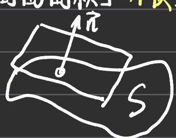
设 du、dv 一组正交基

·记忆!

同理我们能容易推广到三维

2 重积分的几何应用.

[曲面面积] 本质上: ① 曲面积分 ② 矩形面积近似



借助 $dS\cos\alpha=dx\,dy$. 而 $\vec{n}=(-f_x',-f_y',1)$

$\cos\alpha=\frac{\vec{n}\cdot\vec{e_3}}{|\vec{e_3}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}}$

$\Rightarrow dS=\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}\,dx\,dy$.

$\Rightarrow \iint\limits_{S} dS=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}\,dx\,dy$.

曲线积分:(二维)

· 第一型 ① $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$

② 对称性 [轮换对称 / 对称性.

$(1,\tan\alpha)\rightarrow\vec{\tau}$

$\Leftrightarrow(\cos\alpha,\sin\alpha)\rightarrow\vec{\tau}$

正负号选取原则: 参照第一型的取向:

若从起点→终点时正好从小值→大值 取正; 反之取负.

参变量(第一型的)

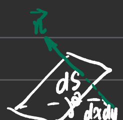
· 第二型 ① $\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_L(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\,ds \overset{\text{相当于提}dx}{=} \int_L(P+Q\tan\alpha)\,dx$. ⇒取正原则1

② 格林公式. ⇒取正原则2:

③ 路径无关.

曲线积分 (三维)

· 第一型 (类比曲面面积)



$dS\cos\alpha = dS\cdot\frac{\vec{n}\cdot\vec{z_0}}{|\vec{n}|} = dS\cdot\frac{1}{\sqrt{f_x'^2+f_y'^2+1}} = dxdy.$

① $dS \xlongequal{投影} \sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}\,dxdy.$

② 对称性质 { 轮换对称性 / 对称性

如何定向 (定正负)

· 非封闭曲面 上(+) 下(−) 前(+) 后(−)

右(+) 左(−)

· 封闭曲面 (里外侧之分)

第二型. $dS = \frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dxdz}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma}$ (投影至不同面

引用 $z=f(x,y)$: $\vec{n}_0 = \left(\frac{-f_x'}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}, \frac{-f_y'}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}\right)$

$dS \to dydz.$ $\cos\alpha = \vec{n}_0\cdot\vec{x_0} = -\frac{f_x'}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}$

$dS \to dxdz$ $\cos\beta = \vec{n}_0\cdot\vec{y_0} = -\frac{f_y'}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}.$

① $\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_{D_{xy}} (-f_x'P - f_y'Q + R)\,dxdy$

② 高斯公式.

三维曲线积分 (一般考查斯托克斯公式)

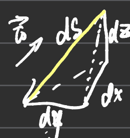
第一型 $ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$

$= \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt.$

$\Rightarrow$ ① $\int_L f(x,y,z)\,ds = \int_L f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$

② 对称性 { 轮换对称性 / 对称性

第二型 $ds \xrightarrow{向x,y,z轴投影}$



$\vec{z_0}$ $\vec{x_0}$ $\vec{y_0}$ dS 所在切向量 $\vec{\tau} = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$\cos\alpha$ $\cos\beta$ $\cos\gamma$.

$dS\cos\gamma = dz \to \vec{\tau_0}\cdot\vec{z_0} \Rightarrow dS = \sqrt{\cdots}\,dz.$

① $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_a^b \left(P + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}Q + \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}R\right)dx.$

② 斯托克斯公式

③ 积分与路径无关

积分的对称性：

· 无向积分的对称性：奇偶的对称性可以从"微元""积分定义"理解

二重积分 ① D关于x轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \begin{cases} 0, & f(x,-y) = -f(x,y) \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma, & f(x,-y) = f(x,y) \end{cases}$$

② D轮换对称 ($y=x$ 对称)

$\Leftrightarrow \iint_D f(x)\,d\sigma = \iint_D f(y)\,d\sigma$，$f$ 无限制.

三重积分，Ω关于xoy面对称，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dv = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_上} f(x,y,z)\,dv & f(x,y,-z) = f(x,y,z) \\ 0 & f(x,y,-z) = -f(x,y,z). \end{cases}$$

第一型曲线积分(三维) ① L关于xOy平面对称

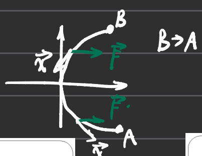
$$\int_L f(x,y,z)\,ds = \begin{cases} 0 & f(x,y,-z) = -f(x,y,z) \\ 2\int_{L_1} f(x,y,z)\,ds & f(x,y,-z) = f(x,y,z) \end{cases}$$

② L轮换对称 ($y=x, z=x, z=y$)

$\Leftrightarrow \int_L f(x)\,ds = \int_L f(y)\,ds = \int_L f(z)\,ds$

第一型曲面积分.(基本同上，不过就是 $L \to \Sigma$，$\int_L \to \iint_\Sigma$)

· 有向积分的对称性



第二型曲线

4. 利用对称性简化计算 (从物理角度)

理解，教学大纲不要求.

(1) 当L对称于x轴时,

$$\int_L P(x,y)\,dx = \begin{cases} 2\int_{L_上} P(x,y)\,dx & P(x,-y) = -P(x,y) \\ 0 & P(x,-y) = P(x,y) \end{cases}$$

理解为x向上分力

(2) 当L对称于y轴时,

$$\int_L Q(x,y)\,dy = \begin{cases} 2\int_{L_右} Q(x,y)\,dy & Q(-x,y) = -Q(x,y) \\ 0 & Q(-x,y) = Q(x,y) \end{cases}$$

55 高等数学A 南开大学

第二型曲面

对称性简化计算法

理解，教学大纲不要求.

1° Σ关于xoy面对称,则

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\,dxdy = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_上} R(x,y,z)\,dxdy, & R(x,y,-z) = -R(x,y,z) \\ 0, & R(x,y,-z) = R(x,y,z) \end{cases}$$

2° Σ关于yoz面对称,则

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,dydz = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_前} P(x,y,z)\,dydz, & P(-x,y,z) = -P(x,y,z) \\ 0, & P(-x,y,z) = P(x,y,z) \end{cases}$$

24 高等数学A 南开大学

积分好题一览:

1. $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ [定积分转换为重积分]

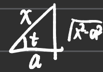
$$\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

常用定积分结果 / 不定积分结果

不定 ↓

- $\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\int \csc\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$
- $\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$



- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \xlongequal{令x=a\tan t} \int \frac{a}{a|\sec t|}\sec^2 t\, dt = \int \sec t\, dt = \ln|\sec t + \tan t| + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal{令x=a\sec t} \int \frac{a\tan t \sec t}{a|\tan t|}\, dt = \int \sec t\, dt = \ln|\sec t + \tan t| + C$

- $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

令 $x = a\sin t$ 即可求解

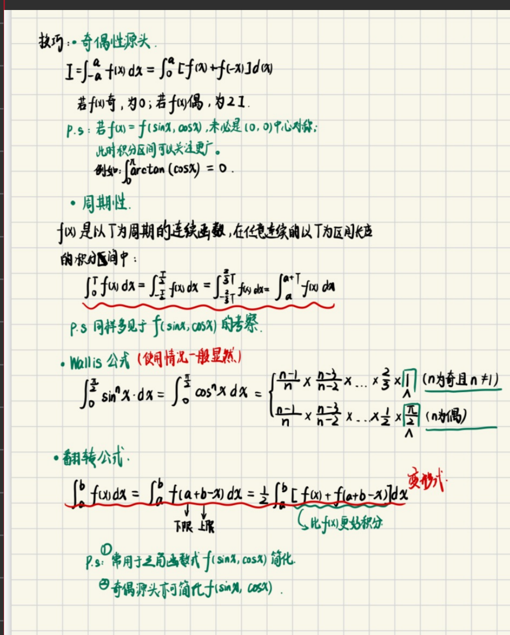
- $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$

令 $x = a\tan t \Rightarrow \int a|\sec t|\, a\sec^2 t\, dt = a^2 \cdot [\int \sec u\, d\tan u]$

$\overset{分部}{=} a^2[\tan u \sec u + \ln|\sec u + \tan u| - \int \sec^3 u\, du]$

$\therefore \int \sec^3 t = \frac{1}{2}\tan t \sec t + \frac{1}{2}\ln|\sec t + \tan t| + C$

定 ↓



技巧：• 奇偶性源头.

$I = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]\, d(x)$

若 $f(x)$ 奇，为0；若 $f(x)$ 偶，为 $2I$.

p.s：若 $f(x) = f(\sin x, \cos x)$，未必是 $(0,0)$ 中心对称；此时积分区间可以关注更广。

例如：$\int_0^{\pi} \arctan(\cos x) = 0$.

• 周期性.

$f(x)$ 是以T为周期的连续函数，在任意连续的以T为区间长度的积分区间中：

$\int_0^T f(x)\, dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, dx = \int_{-\frac{2}{3}T}^{\frac{2}{3}T} f(x)\, dx = \int_a^{a+T} f(x)\, dx$

p.s 同样多见于 $f(\sin x, \cos x)$ 的考察.

• Wallis 公式（使用情况一般显然）

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{2}{3} \times \boxed{1} & (n为奇且n \neq 1) \\ \frac{n-1}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} \times \boxed{\frac{\pi}{2}} & (n为偶) \end{cases}$$

• 翻转公式.

$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a+b-x)\, dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x) + f(a+b-x)]\, dx$ 变形式.

下限 上限

比 $f(x)$ 更好积分

p.s：① 常用于三角函数式 $f(\sin x, \cos x)$ 简化.

② 奇偶源头亦可简化 $f(\sin x, \cos x)$.

$\int_0^{\pi} \arctan(\cos x) = 0$.

无穷级数整理：易错易忘、题型梳理.

题型梳理：

· 一般和函数 $S(x)$ 的求解

方法1 自然裂项求和： e.g. $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan(n+1)-\arctan(n-1)$.

$\Leftrightarrow \arctan\frac{a-b}{1+ab}=\arctan a-\arctan b$

方法2*: 利用一致收敛级数的分析性质——连续、可导、可积于 $\sum_{n=0}^{\infty}$ 里外.

技巧(1) 规范格式少出错 ① $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\cdot x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x f(n)x^n\right)'=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n\right]'dx$

② 令 $S'(x)=g(x)$，$g'(x)=h(x)$ ... 有序记录.

技巧(2) 拆解 $f(n)/a_n$ 系数(加减)、配凑系数(乘除)

e.g. ① $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n\xlongequal{拆解}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$

② $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n}\xlongequal{配凑}\frac{1}{2}x\sum_{n=1}^{\infty}2n\,x^{2n-1}$ (只能提取出来的x、C与n无关的)

↳ 例如提 $x^{n+1}\Rightarrow x^{n+1}\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ ✗!

方法3 根据求导/积分级数和：发现$S(x)$与$S'(x)$存在微分方程.

e.g. $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$. (使用规范格式2更好处理)

$\to S(x)=\frac{1}{2}(H(x))'$，$H(x)=xG(x)$，$G(x)=G''(x)$

New：分奇偶巧出关联：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

· 函数展开为级数.(展开前须考虑收敛域)

(1) 展开为幂级数..

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},x\in(-1,1]$$

$$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n+\dots,x\in(-1,1)$$

特别：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in(-1,1)$

其它常考：

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dots+(-1)^nx^n+\dots$ $(-1<x<1)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$

方法：依据题意适当配凑.

e.g. $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成$(x-1)$的幂级数 i类

e.g. $\sin x$ 展开成$(x-\frac{\pi}{4})$的幂级数 ii类

e.g. $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开为x的幂级数 iii类—需求导预处理

(2) 展开为傅里叶级数.

题型1 函数展开为傅里叶级数.: 区间为 $[-l,l]$ 上

定理 7.3(狄利克雷收敛定理) 设周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上满足狄利克雷条件,则 $f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),x\in(-\infty,+\infty),\quad(7.15)$$

其中

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & (n=0,1,2,\cdots),\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,\cdots).\end{cases}\quad(7.16)$$

记(7.15)式右端的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$,(7.15)式的等号是下述意义下相等:在 $[-l,l]$ 上有

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(-l,l)\text{ 为 }f(x)\text{ 的连续点},\\ \dfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], & x\in(-l,l)\text{ 为 }f(x)\text{ 的间断点},\\ \dfrac{1}{2}[f(l-0)+f(-l+0)], & x=\pm l.\end{cases}\quad(7.17)$$

当 $f(x)$ 上有间断点,边界的写法.

题型2 函数的奇、偶延拓

• 函数正弦展开: 对 $f(x)$ 在 $[0,l]$:

(2) **奇延拓** 为了将 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上展开成正弦级数,可采用奇延拓. 令

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ -f(-x), & -l\leqslant x<0.\end{cases}$$

注意根据奇函数的定义,应有 $f(0)=0$. 如果 $f(x)$ 不满足这个条件,则首先应当改变 $f(x)$ 在 $x=0$ 的值.使之符合这个要求.然后再将 $F(x)$ 在 $[-l,l]$ 上展开.但不论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的值如何,都有 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$,且

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

根据狄氏定理,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

• 函数余弦展开: 对 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上:

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ f(-x), & -l\leqslant x<0.\end{cases}$$

再将 $F(x)$ 在 $[-l,l]$ 上展开成傅氏级数:有 $b_n=0(n=1,2,3,\cdots)$,

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

从而根据狄氏定理,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$$

十分易错点, $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$,计算出 a_0 后返代 $f(x)$ 勿忘除 2!

· 级数判敛法.

数项 $\begin{cases} \text{正项} \\ \text{交错} \\ \text{一般.} \end{cases}$　　　　函数项：一致收敛判敛.

正项级数的判敛法

· (冷)定性：若满足 $u_{n+1} \geq u_n$，那么正项级数一定发散

判敛法
- 比较审敛法 — 极值审敛法.
- 比值审敛法
- 根植审敛法.

都失效 ⟶ 高斯判敛法

- 柯西积分审敛法　u_n 单调递减，$f(n)=u_n \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\sum u_n$ 敛散性相同.

交错项级数的判敛法

- ·莱布尼茨判敛法
- ·绝对收敛(转化为正项级数) $\xrightarrow{\text{证}}$ 收敛.

一般数项级数的判敛法

- ·绝对收敛 ⇒ 收敛
- · $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow$ 收敛　　　　i：$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$ 发散.
- 敛$_1$ + 敛$_2$ ⇒ 敛$_3$.
- 加括号、前面添删项 ⇒ 敛散性不变

函数项级数一致收敛判别法.

- 定义：$\forall \varepsilon>0, \exists n>N(\varepsilon)$, s.t. $|r_n(x)| = |S(x)-S_n(x)| < \varepsilon$
- 柯西一致收敛准则　$\forall \varepsilon>0, \exists n>N(\varepsilon)$ s.t. $|u_{n+1}(x)+\ldots u_{n+p}(x)| < \varepsilon$
- W/M 判别法：$\forall x \in I$，$|u_n(x)| < M_n$，$(n=1,2,3\ldots)$ M_n 为正项级数
  若 M_n 为正项级数，那么 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

· 定量研究收敛 — 收敛值、收敛域

· 求解收敛域的方法：

① $\sum_{n=0}^{n} a_n x^n$：不缺项，x^a 的 a 连续

记 $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ （$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$）

则幂级数的收敛半径

$$R = \begin{cases} 0, & \rho = +\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty \end{cases}$$

② 缺项

比值判别法原理：

$\rho = \lim \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = f(x)$

当 $f(x) < 1$ 时，收敛

当 $f(x) > 1$ 时，发散

当 $f(x) = 1$ 代入讨论

· （小众题型）判断级数是否能展开为泰勒级数/幂级数

① 记 $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x 与 x_0

「充要条件」 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$，$x \in I$，$I = (x_0 - r, x_0 + r)$ $(r > 0)$

② 「充分条件」

$\exists M > 0$, s.t. $|f^{(n)}(x)| \le M$ 对 $\forall n \in N$，$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 都成立

· （小众题型）据级数运算法则推算敛散性

定理 5.3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径为 R_1 与 R_2，和函数为 $S(x)$ 与 $\sigma(x)$. 记 $R = \min\{R_1, R_2\}$，则在它们公共的收敛区间 $(-R, R)$ 内，有

(1) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ 收敛，且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S(x) \pm \sigma(x);$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的柯西乘积级数收敛，且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = S(x) \cdot \sigma(x),$$

其中 $c_0 = a_0 b_0, c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$.

广义积分解惑.

无穷限积分

- 求值 —— 极限求值
- 判敛. ——
  - 比阶判敛法：$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = l$
    $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$
    - 收敛：$0\le l<+\infty,\ p>1$
    - 发散：$0<l\le+\infty,\ p\le 1$
  - 比较审敛法

⇓ 推广

若有 $f(x)\sim g(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等阶/同阶，那么 $f(x)$，$g(x)$ 敛散性相同

↳ 不一定等价无穷大

↳ 找等价方法：洛必达思路、泰勒展开.

注：注意 $x\to+\infty$ 而不是 $x\to 0$，不要用等价无穷小无脑硬套.

瑕积分

- 判断是否有瑕点：$f(x)$ 在 $[a, b-\varepsilon]$ 上可积且 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$.
- 求值
  - $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$
  - $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to b-\varepsilon}\int_a^t f(x)\,dx$
- 判敛.（非负瑕积分）
  - 比阶判敛法. $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x) = l$
    $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$
    - 收敛：$0\le l<+\infty,\ p<1$
    - 发散：$0<l\le+\infty,\ p\ge 1$
  - 比较审敛法
- 一般判敛：绝对收敛 ⇒ 收敛

由比较审敛法而来.

原因在于

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \lim_{t\to a+\varepsilon}\int_t^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$$

$$= \lim_{t\to a+\varepsilon}\frac{1}{1-p}(x-a)^{1-p}\Big|_t^b$$

$$= \lim_{t\to a+\varepsilon}\left(\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right)$$

当 $p<1$ 时 收敛

当 $p\ge 1$ 时 发散

多元函数微分题型一览

- 二重极限的求解与证明

求解 $\begin{cases} \text{Way 1 分母根式有理化} \Rightarrow \text{连续} \\ \text{Way 2 换元降阶为普通极限} \\ \text{Way 3 夹逼 + 放缩} \end{cases}$

证明 $\begin{cases} \text{存在：定义} \\ \text{不存在} \begin{cases} \text{点列不收敛：应用于三角} \\ \text{某一方向上不存在：} y=kx \\ \text{两个方向上极限值不同：} y=x^2,\ y=x \end{cases} \end{cases}$

- 偏导数的求解
  ① MindMap 有序求解法
  ② 全微分法

- 证明可微的方法

可微 $\begin{cases} \text{① 偏导连续} \\ \text{②} \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{\Delta z - dz}{\rho} \overset{*}{=} 0 \ / \ \lim\limits_{\rho \to 0} \dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0 \end{cases}$

不可微 $\begin{cases} \text{① 偏导数不存在} \\ \text{② 不连续} \end{cases}$

- 高阶微分

$$d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k z.$$

- 隐函数求导

$\begin{cases} \text{公式法} \\ \text{求偏导——列方程组法.} \end{cases}$

- 求方向导数：$\overrightarrow{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot (\vec{l_0})$

1 **定理** 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 可微分，那么函数在该点沿任一方向 l 的方向导数存在且有：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$ 其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$ 是方向 l 的方向余弦.

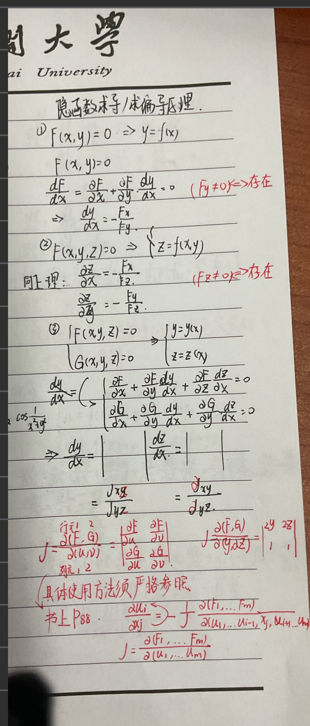
2 定义（尤其是不可微的时候）

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\vec{e}) - f(x_0)}{t}.$$

$\vec{e}\{\cos\alpha, \cos\beta\}$ 是它的方向余弦.

- 梯度

$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = grad(x_0,y_0)\, \vec{n_0}. \\ grad\, f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j},\ f = f(x,y) \end{cases}$



闇大學
ai University

隐函数求导/求偏导原理.

① $F(x,y)=0 \Rightarrow y=f(x)$

$F(x,y)=0$

$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ （$F_y \neq 0$）$\Leftrightarrow$ 存在

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$

② $F(x,y,z)=0 \Rightarrow z=f(x,y)$

同上理：$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}.$ （$F_z \neq 0$）$\Leftrightarrow$ 存在

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$

③ $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$

$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$

$\cos\frac{1}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left| \quad \right| \qquad \frac{dz}{dx} = \left| \quad \right|$

$= \frac{J_{xz}}{J_{yz}} \qquad = \frac{J_{xy}}{J_{yz}}.$

行元 1 2

$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}. \qquad J\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

列元 1, 2

具体使用方法须严格参照书上 P88.

$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F_1,\dots F_m)}{\partial(u_1,\dots u_{i-1}, x_j, u_{i+1} \dots u_m)}$

$J = \frac{\partial(F_1, \dots F_m)}{\partial(u_1, \dots u_m)}$

7.1 多元函数的极值及最大值、最小值

定理 1（必要条件） 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数，且在点(x_0,y_0)处有极值，则有：

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

定理 2（充分条件） 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又

$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\ f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C$

则$f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否取得极值的条件如下：

（1）$AC-B^2>0$时具有极值，且当$A<0$时有极大值，当$A>0$时有极小值；

（2）$AC-B^2<0$时没有极值；

（3）$AC-B^2=0$时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论.